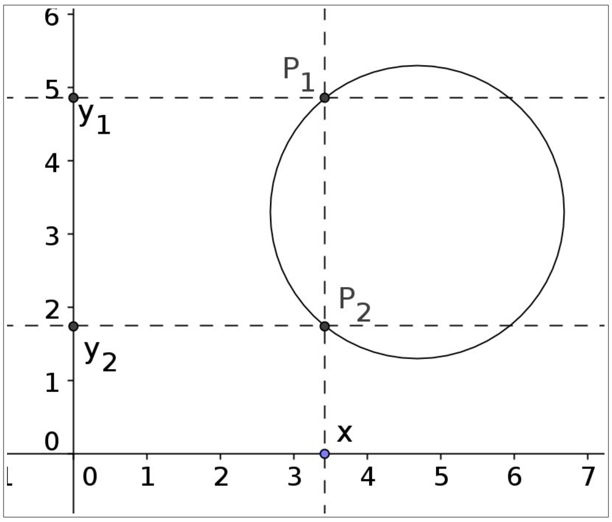
Dans tout ce chapitre, on se place dans un repère **orthonormé.**

1) Équation cartésienne.



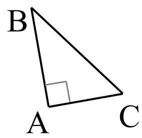
Remarque : Un cercle n'est pas la représentation graphique d'une fonction. En effet, si on choisit une valeur de x au niveau du cercle, il n'y a pas une mais DEUX valeurs de y correspondantes.

Définition et propriété :
On considère un cercle de centre $C(x_C ; y_C)$ et de rayon R.
Tous les points du cercle ont leurs coordonnées $(x ; y)$ qui vérifient : $\boxed{(x-x_C)^2+(y-y_C)^2=R^2}$
De plus, ce sont les seuls points dont les coordonnées vérifient cette équation.
Cette équation est appelée l'***équation cartésienne du cercle***.

Remarque : cette équation ne permet pas de tracer directement le cercle, comme on peut le faire pour une équation de courbe de fonction. Par contre, elle caractérise tous les points du cercle par *une seule* équation et elle est pratique dans les calculs.

Remarque 2 : cette équation a été obtenue grâce au théorème de Pythagore, que vous devez connaître et savoir utiliser :

Théorème de Pythagore :
Si un triangle est rectangle, ***alors*** le carré de son hypoténuse égale la somme des carrés des deux autres côtés.
Autrement dit :
ABC est un triangle rectangle en A ***donc*** $BC^2=AB^2+AC^2$



2) Rappels sur les fonctions sinus et cosinus.

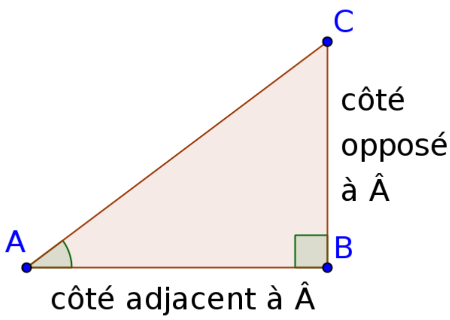
Rappel des formules de collège : qui peuvent toujours être utiles (mais attention : seulement dans un triangle rectangle)

Dans un triangle rectangle :

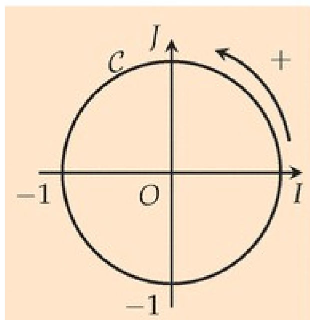
$$\boxed{\cos(\hat{A})=\frac{\text{côté adjacent à } \hat{A}}{\text{hypoténuse}}}$$

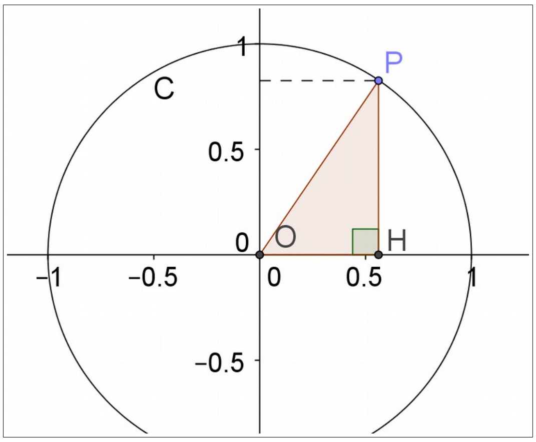
$$\boxed{\sin(\hat{A})=\frac{\text{côté opposé à } \hat{A}}{\text{hypoténuse}}}$$

$$\boxed{\tan(\hat{A})=\frac{\text{côté opposé à } \hat{A}}{\text{côté adjacent à } \hat{A}}}$$



Définition : On considère un repère orthonormé $(O ; I, J)$. Le ***cercle trigonométrique*** est le cercle de centre O et de rayon 1, sur lequel on choisit une orientation :
- le sens contraire des aiguilles d'une montre est appelé ***sens direct***, ou ***trigonométrique***
- le sens des aiguilles d'une montre est appelé ***sens indirect.***

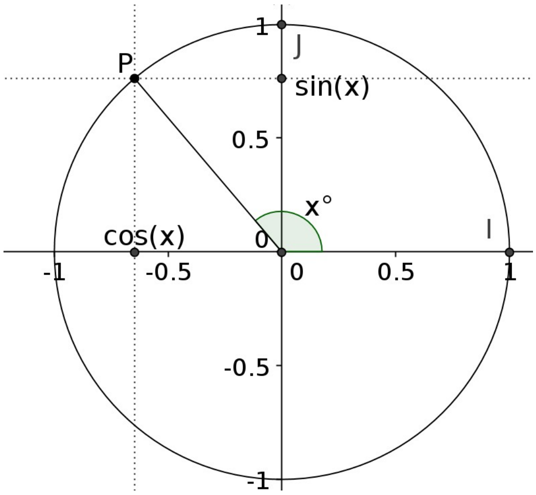




Remarque: Si on choisit un point P sur le quart de cercle entre I et J, on peut obtenir un triangle rectangle OPH, où H est sur le segment [OI] et *où l'hypoténuse est de longueur 1.*

L'intérêt est alors que le cosinus de l'angle $\widehat{HOP}$ *est égal à OH et se lit donc sur l'axe des abscisses.*
De même, le sinus de l'angle $\widehat{HOP}$ *se lit sur l'axe des ordonnées.*

Définition : En utilisant le cercle trigonométrique, on peut définir le cosinus et le sinus pour n'importe quel mesure d'angle :
Pour une certaine mesure d'angle x, on appelle P l'image du point I par la rotation de centre O, de sens direct (sens contraire des aiguilles d'une montre) et d'angle x. P est un point du cercle trigonométrique et l'angle $\widehat{IOP}$ a pour mesure $x°$.
Par définition, le cosinus et le sinus de $x°$ sont alors les coordonnées du point P.
L'intérêt est que : si x est entre 0° et 90°, on retrouve la définition habituelle d'après la propriété précédente.



Remarque : cette définition a déjà été donnée en seconde, sous une forme légèrement différente car il s'agissait également de définir le radian, qui est une autre unité de mesure d'angle. Cette unité est peu utile cette année. Elle correspond à la longueur de l'arc de cercle IP
Vous pouvez quand même retenir que : $\boxed{\pi\, rad = 180°}$

Définition : la tangente d'un angle de mesure $x°$ est définie par la formule : $\boxed{\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}}$

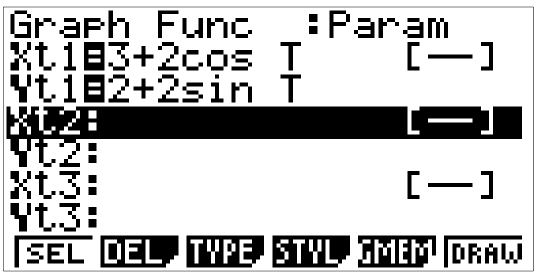
3) Équations paramétriques du cercle.

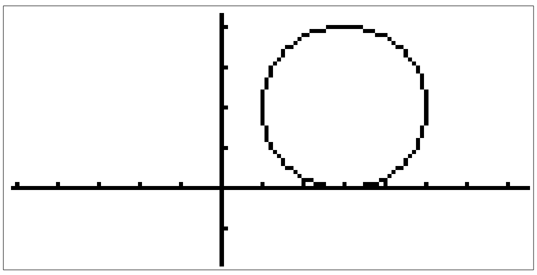
Propriété : On considère un cercle de centre $C(x_C ; y_C)$ et de rayon R.

Les équations paramétriques du cercle C sont : $\boxed{\begin{cases} x = x_C + R \times \cos(t) \\ y = y_C + R \times \sin(t) \end{cases}}$

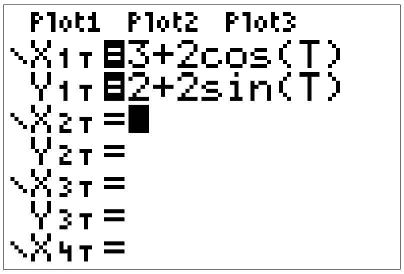
t s'appelle le paramètre. À chaque valeur du paramètre t correspond un point du cercle et réciproquement, tous les points du cercle ont leurs coordonnées $(x ; y)$ qui vérifient les équations paramétriques pour une valeur de t.

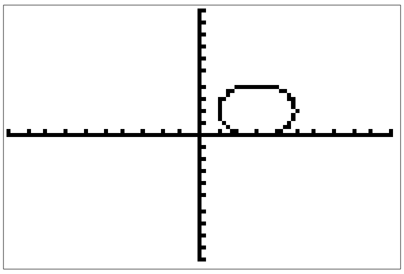
Remarque : ces équations permettent de tracer directement le cercle, à condition de régler la calculatrice sur le mode « paramétrique » (« *type* paramétrique » chez Casio).

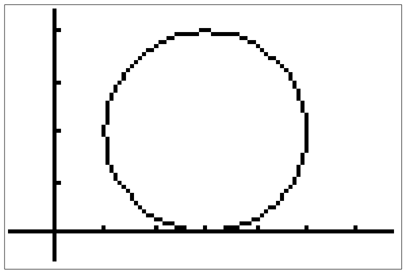




Ci-dessus, on a tracé sur une Casio le cercle de centre C(3;2) et de rayon R=2.

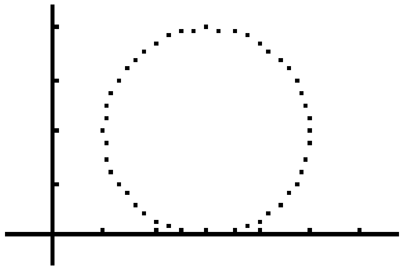




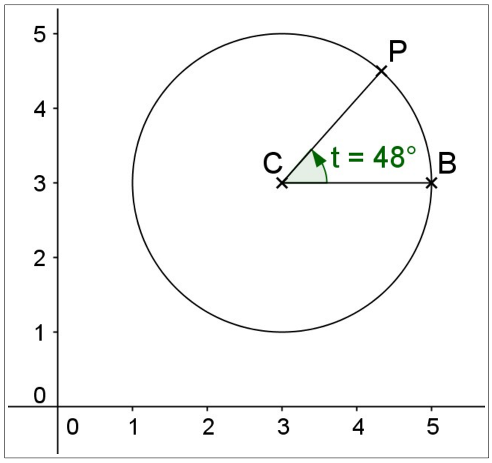


Ci-dessus, on a tracé sur une T.I. le cercle de centre C(3;2) et de rayon R=2.
Sur l'image du milieu le cercle est déformé car le repère n'est pas orthonormé (l'unité est plus grande sur l'axe des abscisses que sur l'axe des ordonnées).
L'image de droite a été obtenue avec un « zoom square » (pour rendre le repère orthonormal) et un « zoom + » (pour agrandir l'image).

Remarque importante : si on règle la calculatrice pour que les points ne soient pas connectés lors du traçage du cercle, on remarque que les points sont régulièrement répartis sur le cercle. C'est un des avantages des équations paramétrées par rapport à l'équation cartésienne du cercle : les deux équations servent à peu près à la même chose, mais chacune a des avantages et des inconvénients.



Propriété (interprétation graphique du paramètre t) :
Graphiquement, le « *t* » des équations paramétriques représente une mesure de l'angle $\widehat{BCP}$ (voir figure ci-contre).



Si on fait varier *t* de 0° à 360°, on obtient le cercle complet.

Mais on peut aussi obtenir seulement un arc de cercle en limitant les valeurs de *t* à un plus petit intervalle.

Par exemple ci-contre à gauche, on a $t_{min}=0^\circ$ et $t_{max}=180^\circ$

Quelques précisions :
- $t=0$ correspond toujours au point le plus à droite du cercle
-si on met une valeur positive de t, c'est qu'on tourne dans le sens direct (c'est à dire le sens contraire des aiguilles d'une montre)
- si on met une valeur négative de t, c'est qu'on tourne dans l'autre sens
- à chaque point du cercle correspondent donc plusieurs valeurs de t : on utilise celle qui nous arrange en fonction du contexte.

Les 4 exemples donnés sur la figure de droite sont à savoir par cœur.