

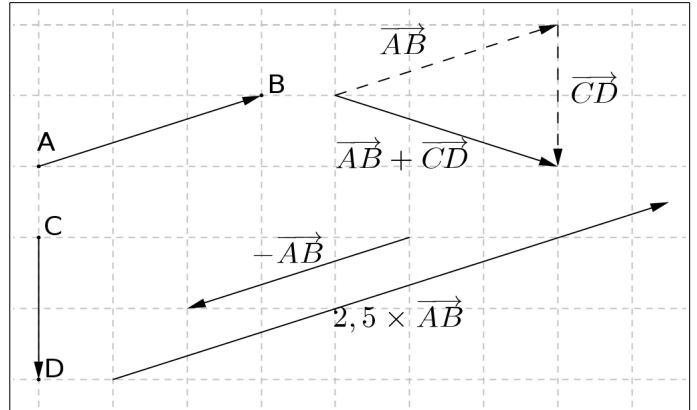
a) Rappels : les vecteurs nous ont été utiles dans le chapitre sur les pavages, pour décrire les translations. Ainsi, la translation de vecteur \overrightarrow{AB} est la translation qui déplace les objets dans la direction de (AB) (c'est à dire parallèlement à la droite (AB)), dans le sens de \overrightarrow{AB} (c'est à dire de A vers B et pas de B vers A), et d'une longueur égale à la longueur AB .

On peut faire plusieurs sortes d'opérations avec les vecteurs, dont le résultat est à chaque fois un vecteur :

- on peut additionner des vecteurs : le résultat de $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ est le vecteur qui correspond à la translation de vecteur \overrightarrow{AB} suivie de celle de vecteur \overrightarrow{CD} .

- on peut prendre l'opposé d'un vecteur : le vecteur $-\overrightarrow{AB}$ est égal au vecteur \overrightarrow{BA} (c'est à dire « comme le vecteur \overrightarrow{AB} , mais dans l'autre sens »)

- on peut multiplier un vecteur par un nombre : par exemple $2,5\overrightarrow{AB}$ est le vecteur qui a même direction et même sens que \overrightarrow{AB} , mais dont la longueur est $2,5 \times AB$ (2,5 fois la longueur du vecteur \overrightarrow{AB}).



Notation : la longueur du vecteur \overrightarrow{AB} peut être notée tout simplement AB , mais on la note également souvent de la façon suivante : $\|\overrightarrow{AB}\|$ (on dit « norme de \overrightarrow{AB} »)

b) Produit scalaire de deux vecteurs :

Il est possible de définir le *produit* de deux vecteurs de telle sorte que le résultat soit *un nombre* (et non plus un vecteur). C'est ce qu'on appelle le **produit scalaire de deux vecteurs**.

Notation : On note le produit scalaire avec un point : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$ est le produit scalaire des vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} et on prononce « \overrightarrow{AB} scalaire \overrightarrow{CD} ».

Remarque : Le principe est que les règles habituelles de calcul ne doivent pas changer : par exemple, on doit pouvoir faire le calcul suivant : $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD})^2 = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) = (\overrightarrow{AB})^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + (\overrightarrow{CD})^2$

Produit scalaire d'un vecteur « avec lui-même » : on a, quel que soit le vecteur \overrightarrow{AB} ,

$$(\overrightarrow{AB})^2 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = \|\overrightarrow{AB}\|^2 \text{ ce que l'on retient sous la forme suivante : } \boxed{\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}}}$$

(Le produit scalaire d'un vecteur avec lui-même est simplement égal au produit de sa longueur avec elle-même.)

Cas où les deux vecteurs sont orthogonaux :

Si les deux vecteurs sont orthogonaux, $\boxed{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0}$

Réciproquement, si $\boxed{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0}$, alors les deux vecteurs sont orthogonaux.

Cas général :

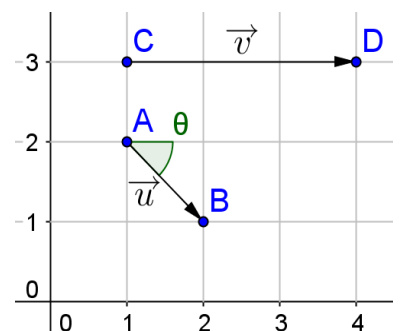
Quels que soient les vecteurs, $\boxed{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{CD}\| \times \cos(\theta)}$

(Le produit scalaire de deux vecteurs est égal au produit de leurs longueurs par le cosinus de l'angle entre les deux vecteurs.)

Exemple : Sur la figure ci-contre, on a $CD=3$ et $AB=\sqrt{2} \approx 1,4$ (Pythagore...)

On a aussi l'angle entre les deux vecteurs qui vaut $\theta = 45^\circ$.

Donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{CD}\| \times \cos(\theta) = 3 \times \sqrt{2} \times \cos(45^\circ) = 3$



Remarque : cette formule regroupe à elle seule les deux cas précédents « un vecteur scalaire "lui-même" » et « vecteurs orthogonaux » (voyez-vous pourquoi?)

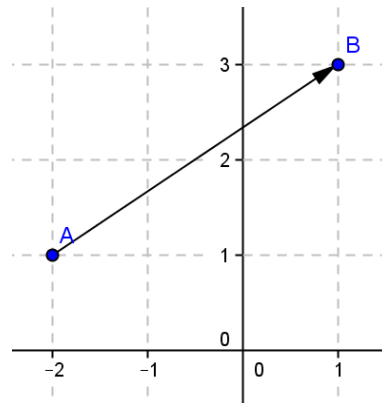
c) Utilisation des coordonnées :

Rappel : Les coordonnées d'un vecteur \vec{AB} sont calculées en soustrayant les coordonnées de B à celles de A.

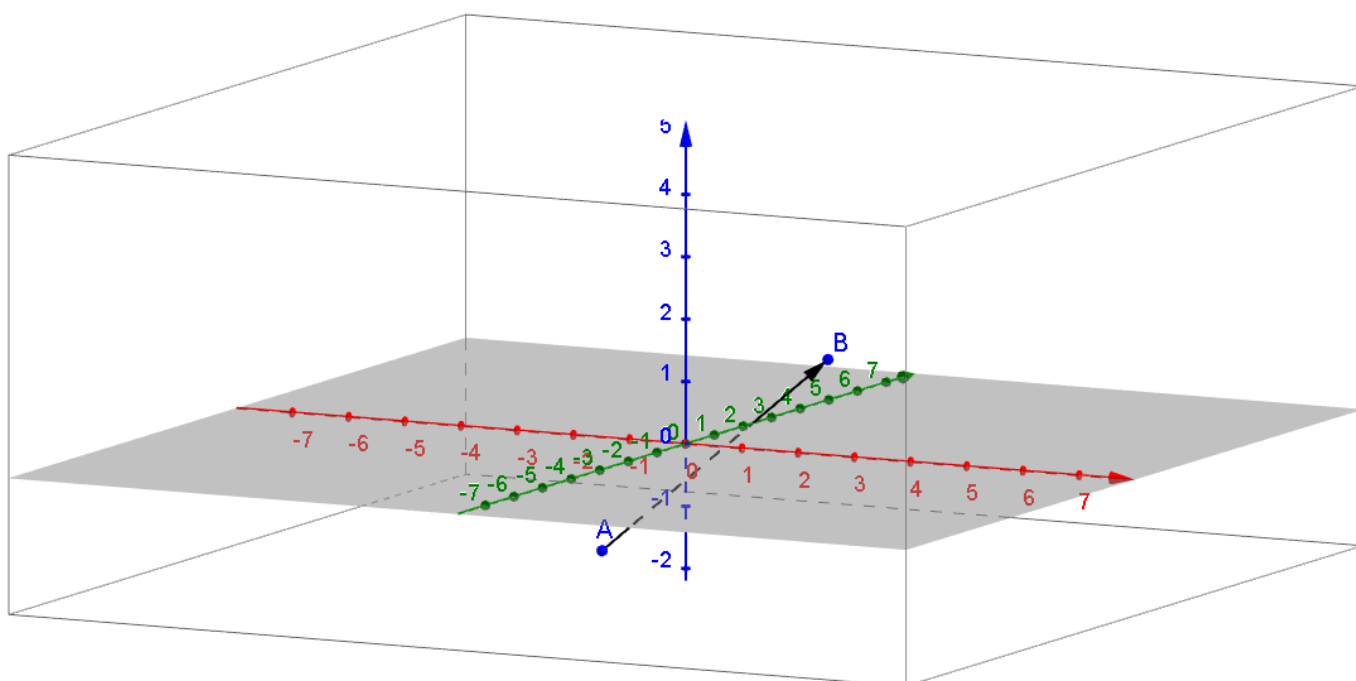
Exemples :

1) dans le plan :

$$A \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad B \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{AB} \begin{pmatrix} 1 - (-2) \\ 3 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$



2) dans l'espace :



$$A \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad B \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{AB} \begin{pmatrix} 1 - (-2) \\ 3 - 1 \\ 1 - (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

On peut calculer le produit scalaire de deux vecteurs grâce à leurs coordonnées : il suffit de multiplier les coordonnées deux à deux et d'ajouter les résultats obtenus.

Propriété : si \vec{AB} a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et \vec{CD} a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, alors :

$$\vec{AB} \cdot \vec{CD} = x \times x' + y \times y' + z \times z'$$

Bien sûr, cette propriété est également valable dans le plan :

Si \vec{AB} a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et \vec{CD} a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, alors :

$$\vec{AB} \cdot \vec{CD} = x x' + y y'$$

d) Résumé : Règles à retenir.

On peut résumer tout ce chapitre avec seulement 5 formules à retenir (et bien sûr, à savoir utiliser!) :

- 1ère formule pour le produit scalaire : $\boxed{\vec{AB} \cdot \vec{CD} = \|\vec{AB}\| \times \|\vec{CD}\| \times \cos(\vec{AB}; \vec{CD})}$
- formule pour la longueur d'un vecteur (cas particulier de la précédente) : $\boxed{\|\vec{AB}\| = \sqrt{\vec{AB} \cdot \vec{AB}}}$
- et (2^e cas particulier) si les deux vecteurs sont orthogonaux, alors $\boxed{\vec{AB} \cdot \vec{CD} = 0}$ (réciproquement, si le produit scalaire vaut zéro, alors les vecteurs sont orthogonaux)

- coordonnées d'un vecteur : $\boxed{\vec{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}}$

- 2ème formule pour le produit scalaire : $\boxed{\vec{AB} \cdot \vec{CD} = x \times x' + y \times y' + z \times z'}$

(où $(x; y; z)$ sont les coordonnées de \vec{AB} et $(x'; y'; z')$ sont celles de \vec{CD})