## 1) Définition

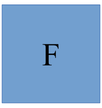
***Rappel*** : ce qu'on appelle le « plan », c'est une sorte de prolongement du plan de travail, indéfiniment dans toutes les directions.

Un ***pavage périodique du plan*** est une figure telle que :

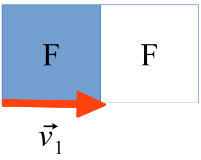
1. elle remplit le plan tout entier (elle peut être prolongée à l'infini dans toutes les directions, il ne subsiste aucun « trou »)
2. elle est composée d'un nombre fini de sous-figures (appelés « ***pavés élémentaires*** » ou « ***tuiles de base*** »), qui sont répétées indéfiniment par symétrie et/ou rotation et/ou translation
3. il n'y a pas de superposition entre les copies des pavés élémentaires (ceux-ci sont seulement en contact sur leurs bords)
4. il existe deux vecteurs $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ tels que pour toute translation de vecteur $\vec{w}$ laissant invariant le pavage, $\vec{w}$ peut s'écrire sous la forme $a\times\vec{v_1}+b\times\vec{v_2}$ , avec $a$ et $b$ des nombres entiers.

***Remarque*** : cette définition est assez compliquée, il est sans doute inutile pour le bac de l'apprendre par cœur. Elle permet d'exprimer mathématiquement la conception d'un motif qui soit utilisable pour carreler une surface aussi grande que l'on veut.
Les trois premières conditions sont assez intuitives.
La quatrième condition paraît beaucoup plus technique. Elle permet de ne considérer que des pavages ***périodiques***. En effet, il existe des pavages du plan qui sont non périodiques, c'est à dire qui ont une structure beaucoup plus compliquée. Par exemple, la figure n°5 de l'activité est un morceau d'un pavage de Penrose, non périodique. Ces pavages peuvent avoir un intérêt artistique, mais ne seront pas étudiés mathématiquement cette année.

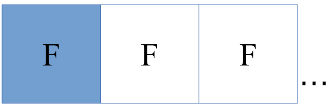
***Exemple*** : Description du pavage du plan par des carrés.



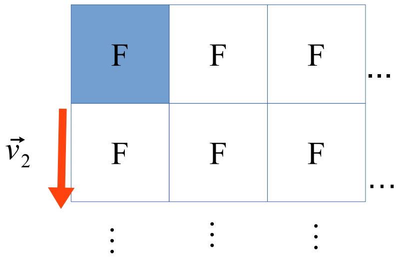

Le pavé de départ est un carré.




On translate ce carré par la translation de vecteur $\vec{v}_1$ .




On répète cette translation indéfiniment (dans les deux sens).

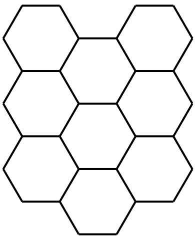


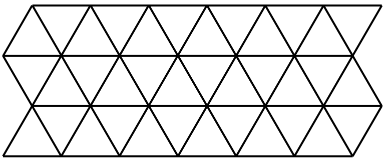

On translate ces carrés par la translation de vecteur $\vec{v}_2$ (de façon répétée dans les deux sens).

On peut ainsi paver le plan tout entier avec des carrés.

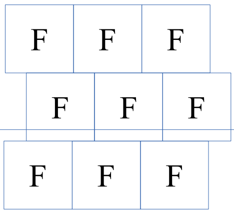
***Images :***

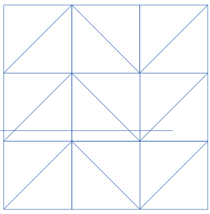
Voici des images montrant comment on peut paver le plan par des hexagones ou par des triangles équilatéraux :





Voici deux exemples différents de pavages du plan par des carrés (décorés d'un « F » ou d'une ligne diagonale) :



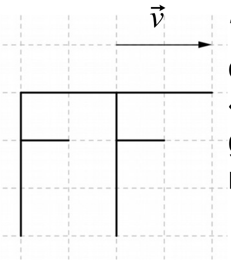



Ces deux pavages sont différents car les déplacements pour passer d'un carré à l'autre ne sont pas les mêmes.

***Remarque*** : pour décrire un pavage, on utilise des transformations isométriques du plan (comme la translation par exemple). Quand on utilise une transformation, il faut préciser certaines choses (par exemple, quand on parle d'une translation il faut préciser le vecteur de cette translation).

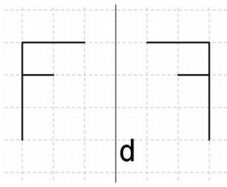
## *2) Transformations isométriques.*

Voici les transformations nécessaires pour décrire les pavages :

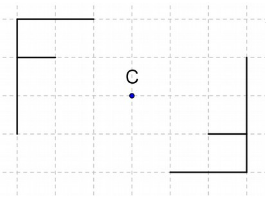



***Translation*** : c'est quand on déplace une figure « sans la tourner » (en la gardant « parallèle à elle-même »).

Il faut préciser ***le vecteur*** de la translation.
Ici, le vecteur est $\vec{v}$ .

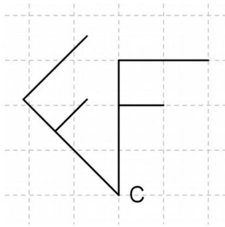



***Symétrie axiale*** : il faut préciser ***l'axe*** (en le dessinant et en lui donnant un nom).
Ici, l'axe est la droite d.




***Symétrie centrale*** : c'est un demi-tour autour d'un point : le centre de la symétrie.

Il faut préciser ***le centre*** (en le dessinant et en lui donnant un nom). Ici, le centre est le point C.

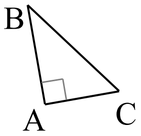



***Rotation*** : il faut préciser ***le centre, l'angle et le sens***.
Ici, le centre est C, l'angle mesure 45° et le sens est le sens contraire des aiguilles d'une montre.

## *3) Quelques rappels pour faire des calculs.*

***Angles :***
Un tour complet correspond à un angle de 360°. Un demi-tour : 180°, etc.
La somme des trois angles d'un triangle vaut 180°.
Lorsqu'on veut calculer des angles dans un polygone régulier, une méthode peut consister à découper ce polygone en triangles et à faire des calculs d'angles dans les triangles.

***Théorème de Pythagore :***
***Si*** un triangle est rectangle, ***alors*** le carré de son hypoténuse égale la somme des carrés des deux autres côtés.




Autrement dit :
ABC est un triangle rectangle en A ***donc*** $BC^2=AB^2+AC^2$

On verra plus tard dans l'année une version valable dans tous les triangles, donc plus générale, appelée le théorème d'Al Kashi.

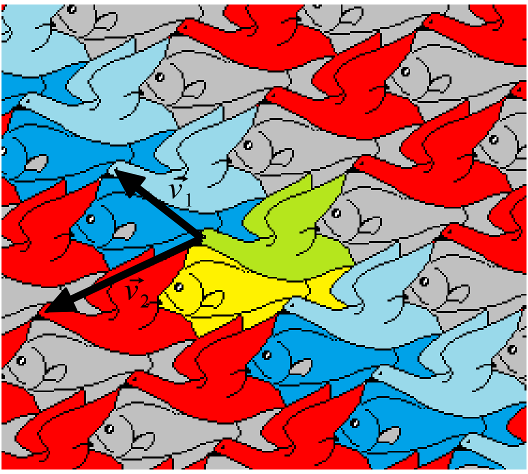
## *4) Quelques rappels pour faire des constructions.*

***Polygone régulier :***
Un polygone régulier est un polygone qui a ses côtés égaux ET ses angles égaux.
(Il est équivalent de le définir de la façon suivante : un polygone régulier est un polygone qui a ses côtés égaux ET qui est inscrit dans un cercle.)

Un hexagone a 6 côtés, un pentagone : 5 et un octogone : 8.

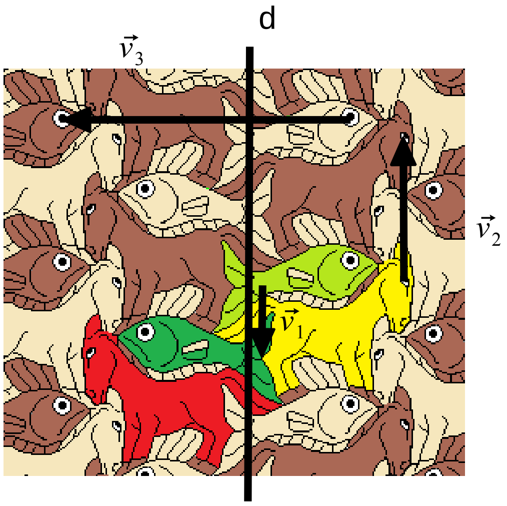
## *5) Quelques exemples de descriptions de pavages.*

Les exemples de pavages suivants sont tirés d’œuvres du graveur néerlandais M.C. Escher (1898 - 1972).

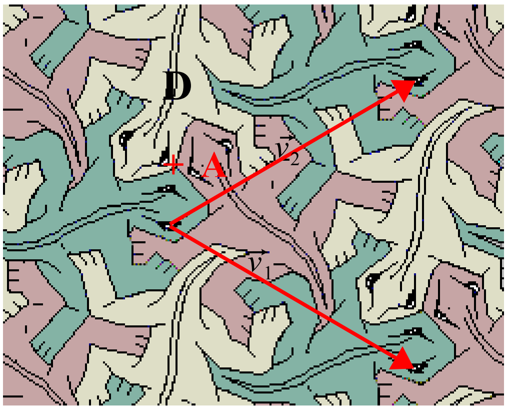



Les pavés de départ sont le poisson jaune et l'oiseau vert.
On translate ces pavés par la translation de vecteur $\vec{v}_1$ .
On répète cette translation (ainsi que celle de vecteur $-\vec{v}_1$ ).
On obtient ainsi la « bande » d'animaux bleus.
On translate ensuite cette « bande » en répétant la translation de vecteur $\vec{v}_2$ (et $-\vec{v}_2$ ) pour obtenir les oiseaux rouges et les poissons gris.

***Remarque*** : Pour dessiner le vecteur d'une translation, penser à relier deux points qui se correspondent dans les figures : par exemple ici les vecteurs relient l’œil d'un oiseau avec l’œil de l'oiseau d' « à côté ».




Les pavés de départ sont le poisson vert clair et l'âne jaune.
On effectue une symétrie axiale d'axe d suivie d'une translation de vecteur $\vec{v}_1$ (on parle parfois d'une « symétrie glissée »).
On obtient alors le poisson vert foncé et l'âne rouge.
Pour finir, on translate cet ensemble de 4 animaux de façon répétée suivant le vecteur $\vec{v}_2$ (et $-\vec{v}_2$) : on obtient ainsi une « bande verticale » et on translate de façon répétée cette bande suivant le vecteur $\vec{v}_3$ (et $-\vec{v}_3$).




Ici, le pavé de départ est le lézard blanc marqué d'un « D ».
On effectue une rotation autour du point A (représenté par un « + » rouge).
Cette rotation, de centre A, d'angle 1/3 de tour (soit 120° car 3 fois 120° font 360°), de sens celui des aiguilles d'une montre, transforme le lézard blanc en le lézard marron.
En répétant la même rotation une deuxième fois, on obtient le lézard vert.
Il reste ensuite à répéter des translations de cette ensemble de 3 lézards pour obtenir une « bande infinie », puis à translater cette bande infinie de façon

répétée selon une autre translation, pour remplir tout le plan : on peut utiliser les translations de vecteur $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ .

***Remarque*** : comme on le constate sur tous les exemples précédents, on utilise toujours 2 translations pour finir le pavage. Cela vient du fait que la structure sous-jacente du pavage utilise une sorte de « quadrillage » que l'on voit apparaître lorsqu'on colorie tous les translatés d'un des éléments de base du pavage. Cela explique pourquoi la définition d'un pavage **périodique** introduit la 4$^{e}$ condition, sur les vecteurs des translations.